単　純　音　階
──音 階 の 構 造──

ゲー・エー・シーロフ　樋口順四郎　樋口　愛子　訳

サリエリ“私には単純音階のようにはっきりしている”.

プーシキン：モーツアルドとサリエリ

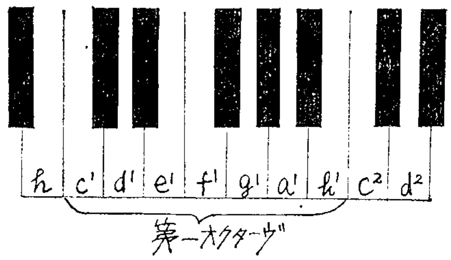
すべての音楽の基礎となるのは楽音すなわち一定の高さを持った音である．物理学的観点からみれば，楽音はある一定の周波数をもった空気中の振動過程である．たとえば ≪a^1≫ という音は周波数 440 Hertz（１秒間の振動数）の振動過程に対応している．(注１) 一般にいつてわれわれの耳は周波数 16〜20000ヘルツの幅を聞くことができ，そのさい 4000 ヘルツまでは音高を区別できる．

ではあるが音楽ではごく限られた数の音しか利用していない，ピアノの鍵盤を見てみよう（Fig. 1).

そこには全部で 88 の白鍵と黒鍵とがある．鍵をたたけば 88 の異った音──高さの異なった音を聞くことができる．これらの音はどのようなものであろうか？　ピアノの音域の中で最も多く使われる中央の部分──第一オクターヴー

の周波数の表は次の通りである.

音　　　名	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
周波数（ヘルツ）	262	294	330	349	392	440	494	523



ちょっと見るとこれらの音の周波数は奇妙な数の排列のようで，それが増加数列であること以外にはそこに何らかの法則性があるかどうか判断するのが難かしい．しかも440という数以外は上記の周波数は決して整数ではなく，ほんとは無理数なのである，表には最も近い整数に丸めた値が記入してある．たとえば e^1 に相当する音の周波数は実は330ではなく，329.63……等々.

いったいなぜこれらの音が音階の中にとり入れられたのであろう？　音楽の基礎としてどんな音を採用すべきかという問題は古代にすでにあったが，最終的な決定がなされたのは比較的最近のことで，18世紀初めのころである．もしすべての楽器がどのような高さの音でもあますことなく出すことができるのならば，この問題はおそらく起らないであろう．いくつかの楽器——たとえばヴァイオリンやセロ——などはその音域の中では，実際に任意の高さの音を出すことができる．しかしその構造から比較的限られたいくつかのきまった音しか出すことのできない楽器——たとえばオルガン，ピアノ，ハーフ——もある．これらの楽器でその出すことのできる音をふやそうとするならば構造がおそろしく複雑になるであろう．だから技術上の必要からも音階は限られた数の音だけからできていなければならないことがわかる．それでこの音階（スケール）がどんな音から構成されるべきかを説明しようと思う．

問題はたとえば温度の目盛を作るときのように簡単ではない。そこでは水の

氷点と沸騰点を基準にとってその間を100の等しい区間で目盛りをすればよい．ところで音楽では音の和声——異った高さの音が同時に鳴る——が大事な役目をもっている．しかし勝手な音を同時に鳴らしても必ずしも気持のいい音とは聞こえない．だから音階のなかには一つの音の他にその音ともっとも自然に共鳴する音が含まれていることが望ましい．このことの考察はしばらくあずかってあとでまた考えることにしよう．

ハープに似た楽器（リラ，七弦琴）は古代でも知られていた．これらの楽器の音は，ピアノの場合同様に，弦の振動による．これからピアノの例で述べるような実験は古代でもすでに知られていたにちがいない．ピアノの弦の根本には止音器がある．それはフェルトをはった小さな木片で，それで弦が振動しないように固定してある．鍵をたたくとまず止音器がはずれて弦が自由になり，つぎに小さな槌が弦を打つ．鍵を押したままでいると自由な弦はながく鳴っている．鍵から手をはなせば止音器が弦をつかまえてその音が止む．もし鍵をしずかに押せば止音器は弦からはずれるが槌は弦をたたかないので音は聞こえない．今つぎのようなことを試みよう．440ヘルツの音に対応するa^1の鍵を絃が鳴り出さないようにそっと押したままでいる．一方でa（小オクターヴ）の鍵を叩いてすぐに手をはなす．短いaの弦の音（220ヘルツ）が聞こえるがそれは鍵がもとにかえれば止む．がそのあとで，解放されていたa^1の弦が鳴るのが聞えてくる．自由にされていたa^1の弦はaの弦の音のために，≪みずから≫鳴りはじめるのである．このことは弦の振動はちょっと見ただけよりももっと複雑なものであることを示している．固有周波数220ヘルツをもつ弦は，また同時に周波数440ヘルツの振動もしていて，それが共鳴によってこの固有周波数440の弦をも振動させるのである．この実験はピアノの別な弦についても，また他の楽器ででもくり返すことができるし，結果はいつも同じである．固有周波数fヘルツをもつ弦は$2f$ヘルツの音をも出す．(注2) この現象はその他の楽器——管楽器，打楽器——でも程度の差はあれ観察される（唯一つの例外は音叉でそれは実際上は倍音をもたぬ純粋の音を発する）．

すでに述べたように，音階の中にはお互に最もよく≪共鳴≫する音が含まれ

るのが自然である．二倍の周波数をもつ音はもとの音と最もよく≪共鳴≫する（弦は一つのもののように振動して，特別な実験によらなければ倍の周波数の音から区別できない）.

したがって次の条件を設けるのは自然である．音階には周波数fと同時に周波数 $2f$をも含まねばならない．fより小さな周波数については，周波数fとともに周波数$f/2$をも含むことを要求するのが自然である．与えられた音とその二倍の周波数の音との間をオクターヴとよぶ，それはかなり広い，ドゥナエフスキーの≪祖国の歌≫：≪モスクヴァから，ロシアのはずれまで≫を歌うときは１オクターヴの音程ではじまる．音楽では１オクターヴの音程だけでは不十分なことはあきらかである．弦についてのわれわれの実験をさらにつづけて，基本の音と共鳴する別の音を見つけよう．しかしまず，音階の構成において考慮すべきもう一つのことをのべる．すなわち，われわれに与えられたメロディをもとのものよりも高くあるいは低く演奏することの可能性の保証が必要である．たとえばあるひとつの歌を，声の性質によっていろいろに歌うことができることは誰もが知っている．テノールでは高くバスでは低く歌う方が都合がよいリズムを考えないことにするならばメロディとは，それを構成している音の間の音程の列として記載できる．音程についてはその音の周波数の比が問題である．すでに見たとおりオクターヴではこの比は２である．メロディをより高くあげることは，もとよりも高い音で，ただしそれぞれの音程に含まれる音の周波数の比を変えずに演奏することを意味する．たとえば≪まひわ≫のメロディを原調で（mi—do—mi—do—fa—mi—re）と第一オクターヴで演奏するならば，周波数の列は（ヘルツで）

330—262—330—262—349—330—294

となるであろう．もしこのメロディを鍵三つだけ高く演奏しても（si—sol—si—sol—do—si—la）メロディの形は耳には変わらない．周波数の系列はつぎのようになる.

494—392—494—392—523—494—440.

メロディの音程の周波数の比が変わらないのを確めるのは容易である.

$$\frac{330}{262}=\frac{494}{392},\quad \frac{349}{262}=\frac{523}{392},\qquad \text{etc}$$

もしも比が異った音程を使えばわれわれの耳にはメロディがくずれて聞こえる。たとえば≪まひわ≫を鍵一つだけ高くして fa—re—fa—re—sol—fa—mi として，すなわち周波数

349—294—349—294—394—392—349—330

として試みればメロディーの性格は明らかにちがってくるし，周波数の比を計算すれば

$$\frac{330}{262}\neq\frac{349}{294}\qquad \text{etc}$$

となる．実際には≪まひわ≫は fa 始めることができるが，それには黒鍵を使わねばならない．このことについてはあとで述べる．

さて，われわれはつぎの二つの条件をみたす音のスケールを構成できたと仮定しよう．

a) f の音とともに $2f$ および $\frac{1}{2}f$ の音がスケールに含まれる．

b) このスケールではメロディの歪曲なしにそれを高くすることができる．

音のスケールの１オクターヴの中は

$$f=f_0<f_1<f_2<\cdots\cdots<f_{m-1}<f_m=2f$$

であるとしよう．これらの音自身ですでに簡単なメロディーをつくっている．このメロディをくずすことなく最も低い音を f_0 から f_1 に移そう．

新らしいメロディーは音 f_1 で始まり，ある音 f_{m+1} で終るが，それは音 f_1 のオクターヴでなければならない（$f_m=2f_0$ であるから）．音 f_{m+1} はすでにオクターヴ（f_0, f_m）の音よりも高いが，それは f_m のあとに来る最初のものであることがわかる．実際，われわれのスケールが f_m と $f_{m+1}=2f_m$ の間に音 f' をもつならば，それはまた音 $\frac{1}{2}f'$ をも持たねばならない．ところで $f_m<f'<f_{m+1}$ であるから

$$f_0>\frac{1}{2}f^1>f_1$$

仮定により f' は f_0 につづく最初の音なのだから f_m と f_{m+1} との間にはいかなる音 f' もあり得ない．

われわれのスケールを一つだけ移すことで，f_1 に始まり f_{m+1} に終る同じメロディが生ずるのである．もとのメロディは $m+1$ 個の異なった音からなっているし，f_1 から f_{m+1} までも $m+1$ 個の異なった音 $f_1\,f_2 \cdots\cdots f_m,\ f_{m+1}$ からなるから新しいメロディーは

$$f_1<f_2<\cdots\cdots<f_m<f_{m+1}$$

の形をもつ，メロディーはくずれないのであるから

$$\frac{f_1}{f_0}=\frac{f_2}{f_1},\ \frac{f_2}{f_1}=\frac{f_3}{f_2},\ \cdots\cdots\frac{f_m}{f_{m-1}}=\frac{f_{m+1}}{f_m},$$

あるいは，同じことであるが

$$\frac{f_1}{f_0}=\frac{f_2}{f_1}=\frac{f_3}{f_2}=\cdots\cdots=\frac{f_m}{f_{m-1}}=\frac{f_{m+1}}{f_m} \qquad (1)$$

でなければならない．

周波数 $f_0,\ f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots f_m$ は幾何数列を作らねばならないことがわかった．この数列の公比を求めよう．いまそれを q とすれば $f_m=q^m f_0=2f_0$； だから $f^m=2$ である．$f_0\ 2f_0$ ととの間にある段階の数 m がわかれば音階は完全に定まる．

これからの構成に都合のよいように周波数 $f_0,\ f_1\cdots\cdots$ から2を底とする対数 $\log_2 f_0,\ \log_2 f_1,\ \cdots\cdots$ に移ろう，オクターヴ $(f_0,\ 2f_0)$ はこれによって $\log_2 f_0$ から $\log_2 2f_0=\log_2 f_0+1$ まで，すなわち長さ1の区間に変わるし，幾何数列 $f_0,\ f_1.\ \cdots\cdots$ は公差 $\log_2\sqrt[m]{2}=\dfrac{1}{m}$ の算術数列 $\log_2 f_0,\ \log_2 f_1,\ \cdots\cdots\log_2 f_m$ になる．従って対数の軸上ではわれわれのスケールは点 $A,\ A+\dfrac{1}{m},\ A+\dfrac{2}{m},\ \cdots\cdots A+1$ で表わされる．ここでAは $\log_2 f_0$ を意味する．

どのような考察によって数mをきめるのか？

われわれはふたたび弦の実験にもどり，弦の振動に際してどのような周波数の音が生ずるかを明らかにしよう．3倍の周波数をもつ音ももちろんあること

を確めよう．それには周波数220ヘルツに対応する≪a≫（小オクターヴ）の鍵と，周波数660ヘルツに対応する≪e^2≫の鍵330ヘルツのe^1のオクターヴとを利用する．しずかに e^2 を押さえ（音はしない）弦を止音器から解放する，つぎに前のときと同じようにaの鍵を強くたたきすぐ手をはなす．すると解放されたe^2の弦の音が聞こえてくる．これを続けると4倍の周波数の音があることもわかるが，$4f=2\cdot 2f$ であるから驚くことはない．さらに5倍……もある，しかし3倍からさきの音はきわて弱い．$2f, 3f, 4f$……のこれらを総称して基本音 f の倍音という．基音と倍音との組合わせの形が，弦の音に特有の音色を与える．ピアノの音かヴァイオリンの音かラッパの音かを区別することができるのも基音と倍音との組合わせなのである．歌手の声の美しさは倍音の量との相対値できまる．音叉は倍音を出さないので，最も≪たいくつな≫音色をもち芸術的な音楽には用いられない．

ここでさらにつぎの条件をおくことは自然である．

c）各々の f と同時に $3f$ の周波数も存在する．

さきに周波数 f と同時に周波数 $\frac{1}{2}f$ の存在がわかっているのだから，さらに周波数 f とともに $\frac{1}{2}3f=\frac{3}{2}f$ も存在しなければならない．この周波数はつねに音階を作る（f, $2f$）の間に入ることによってわれわれの興味をひく．だから階段の数mに，その中のひとつが $\frac{3}{2}f_0$ となるようにえらばなければならない．k番目のものの対数は$A+\dfrac{k}{m}$で，$\frac{3}{2}f_0$ の対数は $A+\log_2\frac{3}{2}$ である．

このことから方程式

$$\log_2\frac{3}{2}=\frac{k}{m} \tag{2}$$

が得られる．この方程式はある整数kとmとで満足されねばならない．しかしこの方程式がけっして整数解をもたないことは容易にわかる．換言すれば$\log_2\frac{3}{2}$は無理数である．実際に対数の定義により(2)から

$$2^{\frac{k}{m}}=\frac{3}{2},$$

あるいはm乗して

$$2^{k}=\left(\frac{3}{2}\right)^{m}, \quad 2^{k+m}=3^{m}.$$

得られた等式の左辺は任意の整数kとmとに対して偶数であるが，右辺は奇数である．だからわれわれの原則は矛盾におちいった．対数的スケールの一様性は周波数fと$\frac{3}{2}f$とが同時に存在するという要求とはあいいれない．音程$\left(f, \frac{3}{2}f\right)$を純正5度という．一様な対数的スケールでは純正5度は存在しない．

そこでスケールの一様性をすてるか，あるいは純正5度をすてるか，ということになった．スケールの一様性はメロディの上下への移調の可能性を保証するのだからこれをすてるわけにいかぬ．純正5度をすてる方が実用的である．われわれは無理数$\log_2\frac{3}{2}$に近い有理数$\frac{k}{m}$を，対応する周波数の差が1ヘルツ以下になり，従って耳で区別できないようにえらぶことによって，音階をつくりあげよう．そしてそのために必要な計算の精度の目安を出そう．第一オクターヴは全体で262ヘルツから523ヘルツの間である．従って全体の長さは260ヘルツの程度であり，対数スケールではそれは1の区間に相当する．だから1ヘルツは対数スケールの上ではほぼ0.004に相当する．数$\frac{k}{m}$と$\log_2\frac{3}{2}=0.585\cdots\cdots$とのちがいは0.005以下でなければならぬ．

音程$(f, 2f)$の上には，5度$\frac{3}{2}f$のほかにもその上に音階の楷梯が来るのが望ましい点がある．世俗音楽の諸例を分析してみればつぎのような周波数の比によって表わされる音程がよりしばしば出現することがわかる．(注3)

2（オクターヴ)，3/2（5度）5/4（3度）4/3（4度）5/3（6度）9/8（2度）15/8（7度)．

それぞれに対応する底2の対数は

$$\log_2 2=1, \quad \log_2\frac{3}{2}=0.585, \quad \log_2\frac{4}{3}=0.416, \quad \log_2\frac{5}{3}=0.737$$

$$\log_2\frac{5}{4}=0.323, \quad \log_2\frac{9}{8}=0.169, \quad \log_2\frac{15}{8}=0.908.$$ (注4)

一様なスケールを構成するときにはこれらの数にできるだけ近いものを得る

のが望ましい．これらの数のなかで最も大きな意味をもつのは，1オクターヴの範囲内で最も自然な音程に対応している $\log_2\frac{3}{2}=0.585$ である．

無理数を有理数で近似するときのもっともよい手段は連分数である．すなわち

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}}} \tag{3}$$

の形の分数で a_1，a_2，……は正の整数である．

区間〔0, 1〕内の数 α はすべて連分数（α が無理数ならば無限の）に展開できることはよく知られている．

$$\frac{1}{a_1},\quad \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}},\quad \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}}\qquad \text{etc}$$

のような形の分数は明らかに有理数で，これを連分数(3)の近似分数とよぶ．数 α に対する連分数の近似分数

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}=\frac{p_n}{g_n}$$

と α との距離は $\frac{1}{q_n{}^2}$ 以下であり，また，分母が q_n をこえぬ，任意の分数 $\frac{p}{q}$ と α との距離よりも小さい，$\Bigl($式で書けば，$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n{}^2}$，また $q<q_n$ なら $\left|\alpha-\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\right|>\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\Bigr)$ 連分数の詳しいことはたとえば，初等数学エンサイクロペディア（第一巻，A，ヒンチン）にある（日本版，基礎数学第2巻，第3部，数論．東京図書）

$x=\log_2\frac{3}{2}$ の連分数展開の最初の数項をみつけよう．対数の定義から

$$2^x=\frac{3}{2} \tag{4}$$

$x<1$ であるから，$y=\dfrac{1}{x}$ とおけば $y>1$ で等式(4)は

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{y}=2 \tag{5}$$

の形になる。

求める値 y は 1 と 2 の間にあることはあきらかである $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{1}=\frac{3}{2}<2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}>2\text{ だから}\right)$，そこで $y=1+\dfrac{1}{Z}$ とおく，そうすれば $\dfrac{1}{Z}<1$，$Z>1$ である．等式(5)は

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=2,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{z}}=\frac{4}{3}$$

となるから

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{z}=\frac{3}{2} \tag{6}$$

である。Z は 1 と 2 の間にあることは明らかである $\left(\frac{4}{3}<\frac{3}{2},\ \left(\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}>\frac{3}{2}\text{ だから}\right)$. そこでさらに $Z=1+\dfrac{1}{u}$ とおくと等式(6)はつぎのように形を変える

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{3}{2},\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{u}}=\frac{9}{8},$$

これから

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{u}=\frac{4}{3}\ . \tag{7}$$

ここで u はすでに 2 と 3 との間にある $\left(\left(\frac{9}{8}\right)^{2}=\frac{81}{64}<\frac{4}{3},\ \left(\frac{9}{8}\right)^{3}=\frac{729}{512}>\frac{4}{3}\text{ だから}\right)$，だから $u=2+\dfrac{1}{v}$ とおくと，また，$v>1$ である，v に対しては(7)から

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{2}\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{4}{3},\ \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{v}}=\frac{256}{243},$$

あるいは

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{v}=\frac{9}{8}\ . \tag{8}$$

これからさきは常用対数表を使えば容易に計算できる。対数をとると(8)から

$$v(\log 256-\log 243)=\log 9-\log 8,$$

対数表により　　$v(2.4082-2.3856)=0.9542-0.9031,$

したがって　　$0.0226\,v=0.0511.$

vが2と3との間にあることは明らかである．計算はいくらでも続けることができるけれどこれで止めておこう．以上の結果として

$$x=\frac{1}{y}=\frac{1}{1+\frac{1}{Z}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{u}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{v}}}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\cdots\cdots}}}.$$

これが求める連分数展開の最初の数項である．近似分数は次のようになる．

$$\frac{1}{1}=1,\quad \frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{5},\quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{7}{12}.$$

最初の二つは余りにも大ざっぱである。第三の$\frac{k}{m}=\frac{3}{5}=0.600$ と $\log_2\frac{3}{2}=0.585$ との誤差0.015はもうすでに比較的に小さいが，この誤差も望ましい値0.004に比べると4倍の大きさである。さらに数 $\frac{1}{5}$ の倍数からできるスケール，すなわち $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$ をしらべると，たとえば

$$\log_2\frac{5}{3}=0.737,\ \log_2\frac{9}{8}=0.169$$

はこのスケールの分割点からかなり遠い．

では最後の近似，$k/m=7/12=0.583$，にうつろう．求めている値0.585に十分に近いし，その誤差0.002は許容量の半分である．これに対応する音階は

対数の軸上では，長さ１の区間を12の等しい間隔に分けた点に構成される．

$$\frac{1}{12}=0.083,\quad \frac{2}{12}=0.167,\quad \frac{3}{12}=0.250,\quad \frac{4}{12}=0.333\ ,$$

$$\frac{5}{12}=0.418,\quad \frac{6}{12}=0.500,\quad \frac{7}{12}=0.583,\quad \frac{8}{12}=0.667\ ,$$

$$\frac{9}{12}=0.750,\quad \frac{10}{12}=0.833,\quad \frac{11}{12}=0.917,\quad \frac{12}{12}=1.000\ ,$$

この中の７番目は５度に極めて近い．

われわれが関心をもつ値　$\log_2\frac{4}{3}=0.416$，$\log_2\frac{5}{3}=0.737$，$\log_2\frac{5}{4}=0.323$，$\log_2\frac{9}{8}=0.169$，$\log_2\frac{8}{5}=0.908$ もまたたとえ $\log_2\frac{3}{2}$ ほどの精密さではないにしろ，スケールの点の近くにおちる　　　(Fig. 3)．

0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1
$\log_2 f_0$		0.169		0.323	0.416		0.585		0.737	0.908		$\log_2 2f_0$

(Fig. 4)．

0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1
c^1		d^1		e^1	f^1		g^1		a^1		h^1	c^2

こうしてこの12段階の音階がわれわれの問題を解決してくれることがわかる．

いまやわれわれはオクターヴの周波数の合法則性を完全に説明できる．第一に十二段階の音階を，そのとなりあった周波数の大きいものと小さいものとの比が一定で $\sqrt[12]{2}$ にひとしいという条件できめる．

そうしてできるもののなかで一番小さな音程を半音と名づける．となり合った二つの半音の音程を合わせて全音という．すべてのオクターヴは６全音あるいは12半音に分けることができる．オクターヴの基本の周波数は Fig. 3. に示

した周波数 f_1, f_2, ……をわずかに変更して，たとえば f_1 のかわりにそれに最も近い $\frac{2}{12}$ を，f_3 のかわりには $\frac{4}{12}$ を……といった風にきめる．(Fig・4)．オクターヴの最初の音をｃと名づけ，一全音だけ上のものをｄとよぶ，さらに一全音だけ上のものをｅとよぶ，つぎの一半音だけ高いものを f とよぶ．この四つの基本音がいわゆるテトラコードを作る．オクターヴの後半に第二のテトラコードがある．それは周波数の比が等しいという意味で前のものと同じで，それは周波数 $\frac{3}{2}f_2$ に対応する音ｇではじまる．それから一全音上にａと名づける音がありさらに一全音上にｈがある，テトラコードは次の半音上の c^2 で終る．これは c^1 のオクターヴである．ほかならぬこれらの周波数がこの話のはじめでみた通り第一オクターヴに現われるのである．周波数のを底とした対数は次のようになる．

音　　名	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
周波数 f（ヘルツ）	262	294	330	349	392	440	494	523
$\log_2 f$	8.031	8.198	8.365	8.448	8.615	8.781	8.948	9.031
$\log_2 \frac{f_0}{f} = \log_2 f - \log f_0$	0	0.167	0.334	0.417	0.584	0.750	0.917	1.000

対数の差は，われわれの音階で基本となる音として現われたあの数値にちょうど等しくなっていることがわかる（前頁参照）．こうして第一オクターヴの構造が説明された．

七つの基本音のほかに，オクターヴにはまだ五つの補助的な音があり，それらをあわせて十二段階の完全な音階になる．この五つはとなりの基本音名に≪ディエーズ（シャープ）≫あるいは≪ベモール（フラット）≫という語をつけて言い表わされ，それは半音高いことあるいは低いことを意味している．たとえば c から半音高い音は ♯c (cis) あるいは bd (des)，これらの補足的な音は，第一オクターヴの五つの黒鍵によって得られる．

もし音階の基本音だけで，すなわち白鍵だけを使って，あるメロディを演奏

するならば（たとえば≪まひわ≫のメロディを mi の音ではじめるように）黒鍵はあずかりしらぬわけである．がもしメロディをたとえば半音だけ高くしようとするならば黒鍵をも使わねばならなくなる．何故かといえば do はそれよりも半音だけ高い re ベモールに移らなければならないのだから．

基本音 do—(全音)—re—(全音)—mi—(半音)—fa—(全音)—sol—(全音)—la—(全音)—si—(半音)—do からの≪メロディ≫はいわゆる do majeur(ハ長調）の自然音階を作っている．このメロディを音程をかえずにオクターヴの中でいろいろな場所に移せばさらに11の音階ができる．その名称の最初のところに音階の第一番の音の名前が来るし，つぎに≪majeur（長調)≫が来るがこれは（全音—全音—半音—全音—全音—半音）で音程が構成されていることを示している．たとえば do majeur（ハ長調）を一音だけ高くすれば re majeur（ニ長調）になるがそれは re—(全音)—mi—(全音)—♯fa—(半音)—sol—(全音)—la—(全音)—si—(全音)—♯do—(半音)—re からできている．

やはり七音からできてはいるが音程の相互関係が異なる音階がいくつかある．たとえば≪ハ短調の自然音階≫は do，re，♭mi，fa，sol，♭la，♭si，do からできている．その音程は 全音—半音—全音—全音—半音—全音—全音 である．ハ長調の音階の基本の三つの音 do—mi—sol は do の弦の１オクターヴ内の完全協和音の三つの構成分子にほかならない（sol^2 は do^1 の３倍の周波数，mi^3 は５倍の)，この三和音が耳に安定的かつ決定的に知覚されるのはおそらくはこのせいであろう．ハ短調の音階の基本の三音 do—♭mi—sol はハ長調の三和音の真中を半音下げることによって得られる．その結果 ♭mi と mi^2 との間に打ち解けぬ不協和音を生じる，このことがおそらく短調三和音の≪短調≫的音色の特性を説明してくれるであろう．クラシックの作品は長調または短調のどれかの音階によった，だから≪ショパンのト短調バラード≫とか≪変イ短調のポロネーズ≫とかその音階の名前をつけているのはこのためである．

対数的に一様な十二段階の音階は音楽と数学のながい発達の総まとめとして出現した．もちろんそれは無理数の代数と対数の創設よりも前には現われ得なかったであろうし，この数学的手段の兵器庫のすべてを学者が自由に支配する

ようになったのは17世紀になってからのことである．1700年ころドイツの学者で音楽家アンドレアスヴェルクマイステルがここで述べた音階を提案し，それに応じて設計されたピアノを製造した．その時まで楽器は原則として純正音程(5度，3度)により調律され，その結果として必然的に別の調による演奏の困難さや，転調移調の不円滑が伴い，音楽の発展の壁となっていた．しかしヴェルクマイステルの音階がすべての音楽家に一挙に採用された訳では決してない，たとえば有名なフランスの哲学者，音楽家ディドロはその反対者であった．彼は純正音程を欠いた音階は音楽の基礎にはなり得ないと考えた．しかし18世紀の偉大なドイツの作曲家ヨハン・セバスチアン・バッハは新しいシステムの生命力を事実でもって証明した．彼は一括して≪平均律ピアノ曲集≫（1722—1744）の名称をもつ二巻を作曲した．その各巻は24の作品（プレリュードとフーガ）を含む，それはそれぞれ12の長調と12の短調とで書かれている．

バッハの作品は新しい音楽の発展に一つのエポックをおいた．それ以後の作曲家はすべてこの新しいシステムによってその音楽を創作した．現代においてもその可能性は決して汲みつくされたわけではない，ヴェルクマイステルの音階では純正伝統音程が歪曲されていることは，訓練された耳だけが認めることができ，それには調性の選択の自由と転調の自然さというおまけがあるのである．今世紀に入ってオクターヴの中の階段の数を24，48あるいは53にまでふやそうという提案がなされた．それによってオクターヴの中にもっと純正なものに近い音程を得ようというのであって，実験的な楽器さえ製造されたが，音楽的実践にまで普及されてはいない．

むすびとして，音楽学が今なお理論的に解釈できないでいる一つの事実を注意しよう．われわれの構成法によれば12の長調も，12の短調も，それぞれ響き方は同一のはずである．しかし多くの音楽家たちは調には個性があると考えている．たとえば，ハ長調は快活な，明るい，静かな気分が特長であるし（ベートーヴェン≪ソナタ≫），ホ長調は興奮，激情（リストの多くの作品，チャイコフスキーのロマンス≪日は君臨するか≫）嬰ヘ長調は喜びで高潮した感情

(グリークの≪春≫)ハ短調は男性の悲哀(ベートーヴェンの英雄交響曲の中の≪葬送行進曲≫)ホ短調は深刻な悲劇的状態(チャイコフスキーの≪スペードの女王≫のポリナのロマンス)…….このように判断することに何らかの客観的な法則性が反映しているのか,あるいは伝統や教育の影響でそうなるのかまだ説明はされていない.楽器を製作する過程が聴覚の特殊性のために実際には一様な,もっと厳密なものではなくあるいはちょっとゆるやかな音程をとらせるようになり,したがって,たとえば do—sol の音程に対する周波数の比が理論的には一致すべき mi—si の音程の同じような比と一致しないためにおこるのかもしれない.いずれにしろ科学は一カ所に止まってはいない,いつの日にかこのことやまたその他の今日ではまだ解明されていない音楽の法則が明らかにされるであろう.

(注1) 国際規準による.伝説によれば,いつの時代かわからないが,古代エジプトの町フィヴァで毎日夜明にこの音が,メムノン王の巨像と名づけられた巨大な立像から鳴りひびいた.そしてフィヴァの町の音楽家たちは楽器の調子をその音に合わせるようになった.メムノンの巨像はわれわれの世紀のはじめにその音を鳴りひびかせることを止め,この伝説の真偽を確めることは不可能となった.

(注2) 一様な弦の振動は周波数 f, $2f$, $3f$……をもつ振動の重ね合せであるという事実は理論的にも説明できるが,それにはより高等な数学が必要である.一つ一つの成分の振幅も計算できる.たとえば長さ l の弦を h の距りのところで叩けばこれによって生ずる $2f$ の音を f の音との振幅の比は $\frac{1}{4}\frac{\sin(2h\pi/l)}{1+\sin(h\pi/l)}$ にひとしい.$h=l/2$ の場合だけは $2f$ の音は生じない.しかしこのときでも $3f$ その他の音は発生する.ピアノの場合は槌でたたくのは弦の長さの 1/8 のところである.この点は $2f$ の音との振幅の比が最大になる点に近いが,それと一致はしない.それは $3f$, $4f$……の周波数をも考えた設計上の配慮である.

(注3) これらの分数はまた理論的な考察からも得られる.

(注4) $\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$ で計算すればよい.

(訳者注,中国ではヨーロッパよりも約一世紀ほど早く,明の時代に,平均律の笛が作られている.)